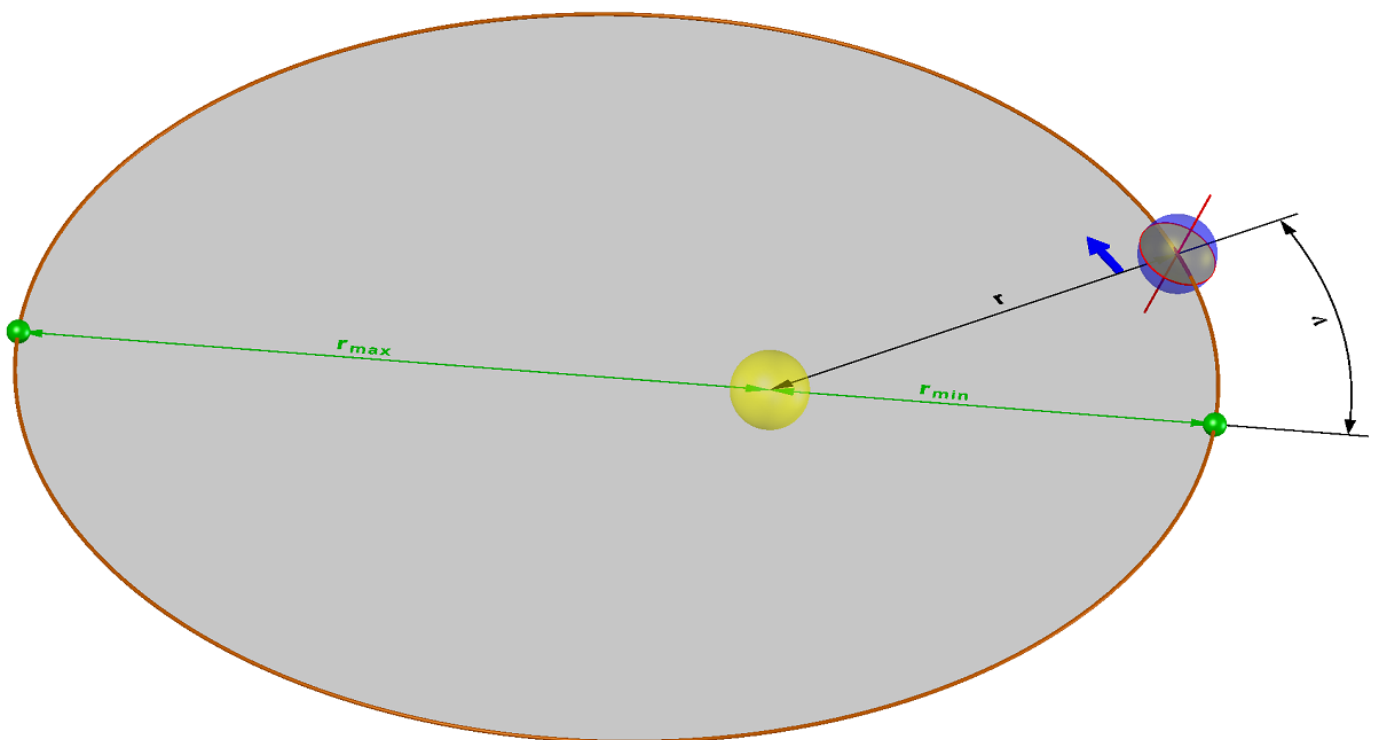


Analytische Berechnung der wahren Anomalie in einer elliptischen Umlaufbahn

Autor: Albin Hoffmann Bütgenbach den 17.4.2006 (Belgium)

Berechnungsparameter:

- r = Abstand vom Brennpunkt zum Körper (Abstand zwischen Sonne und Erde)
- $r_{\min}$ = kleinster Abstand zum Brennpunkt
- $r_{\max}$ = größter Abstand zum Brennpunkt
- ν = wahre Anomalie (Winkel zwischen Periapsis und Körper gemessen im Brennpunkt)
- e = Exzentrizität
- t = Tag
- t_p = Tag im Periapsis (Perihel)
- T = Periode = Anzahl Tage zwischen zwei Durchgänge im Periapsis (Anomalistisches Jahr)



Positionsvektor vom Brennpunkt zum Körper:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \nu \\ r \cdot \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix} = \text{radialer Einheitsvektor} \rightarrow \boxed{\vec{r} = r \cdot \vec{i}}$$

Bewegung auf der Umlaufbahn:

$$\dot{\vec{i}} = \begin{pmatrix} -\dot{\nu} \cdot \sin \nu \\ \dot{\nu} \cdot \cos \nu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\vec{\mu} = \begin{pmatrix} -\sin \nu \\ \cos \nu \\ 0 \end{pmatrix}} = \text{tangentialer Einheitsvektor} \rightarrow \boxed{\dot{\vec{i}} = \dot{\nu} \cdot \vec{\mu}}$$

$$\dot{\vec{\mu}} = \begin{pmatrix} -\dot{\nu} \cdot \cos \nu \\ -\dot{\nu} \cdot \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\dot{\vec{\mu}} = -\dot{\nu} \cdot \vec{i}}$$

Geschwindigkeitsvektor des Körpers:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{i} + r \cdot \dot{\vec{i}} \quad \boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{i} + r \cdot \dot{\nu} \cdot \vec{\mu}}$$

Beschleunigungsvektor des Körpers:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \cdot \vec{i} + \dot{r} \cdot \dot{\vec{i}} + (\dot{r} \cdot \dot{\nu} + r \cdot \ddot{\nu}) \cdot \vec{\mu} + r \cdot \dot{\nu} \cdot \dot{\vec{\mu}} \quad \boxed{\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\nu}^2) \cdot \vec{i} + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\nu} + r \cdot \ddot{\nu}) \cdot \vec{\mu}}$$

Gravitation:

Die Gravitationskraft wirkt senkrecht auf $\vec{\mu}$. Die tangentielle Komponente der Beschleunigung = 0

$$\rightarrow \boxed{2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\nu} + r \cdot \ddot{\nu} = 0} = \text{tangentielle Beschleunigung}$$

$$\text{multipliziert durch } r \quad \text{mit: } r \neq 0 \rightarrow 2 \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \dot{\nu} + r^2 \cdot \ddot{\nu} = 0$$

$$\text{Dies ist die Ableitung von: } \boxed{r^2 \cdot \dot{\nu} = C_0} \quad (1) \quad (= \text{Beweis für das zweite Keplersche Gesetz})$$

Bei einer elliptischen Umlaufbahn:

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \rightarrow \boxed{r = \frac{1+e}{1+e \cdot \cos \nu} \cdot r_{\min}} \quad (2)$$

$$(1)(2) \rightarrow \boxed{\frac{(1+e)^2 \cdot r_{\min}^2}{(1+e \cdot \cos \nu)^2} \cdot \dot{\nu} = C_0}$$

$$\boxed{\frac{\dot{\nu}}{(1+e \cdot \cos \nu)^2} = C_1} \quad (3) \quad \text{mit: } C_1 = \frac{C_0}{(1+e)^2 \cdot r_{\min}^2}$$

Lösung der Differentialgleichung:

$$(3) \rightarrow \frac{dv}{(1+e \cdot \cos v)^2} = C_1 \cdot dt$$

$$\text{wenn: } \boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{v}{2}\right) = u} \quad (4) \rightarrow \boxed{\cos v = \frac{1-u^2}{1+u^2}} \quad \boxed{dv = \frac{2 \cdot du}{1+u^2}}$$

$$\frac{(1+u^2) \cdot du}{\left(\frac{1+e}{1-e} + u^2\right)^2} = C_2 \cdot dt \quad \text{mit: } C_2 = C_1 \cdot \frac{(1-e)^2}{2}$$

$$\text{wenn: } \boxed{u = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot w} \quad (5) \rightarrow \boxed{du = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot dw}$$

$$\left(\frac{1-e}{1+e}\right) \cdot \frac{dw}{(1+w^2)^2} + \frac{w^2 \cdot dw}{(1+w^2)^2} = C_3 \cdot dt \quad \text{mit: } C_3 = C_2 \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$\left(\frac{1-e}{1+e}\right) \cdot \left(\frac{dw}{1+w^2} - \frac{w^2 \cdot dw}{(1+w^2)^2}\right) + \frac{w^2 \cdot dw}{(1+w^2)^2} = C_3 \cdot dt$$

$$\left(\frac{1-e}{2 \cdot e}\right) \cdot \frac{dw}{1+w^2} + \frac{w^2 \cdot dw}{(1+w^2)^2} = C_4 \cdot dt \quad \text{mit: } C_4 = C_3 \cdot \frac{1+e}{2e}$$

$$\left(\frac{1-e}{2 \cdot e}\right) \cdot \int \frac{dw}{1+w^2} + \int \frac{w^2 \cdot dw}{(1+w^2)^2} = C_4 \cdot t + C_5$$

$$\text{wenn: } \boxed{x = w} \quad \text{und} \quad \boxed{dy = \frac{w \cdot dw}{(1+w^2)^2}} \rightarrow \boxed{dx = dw} \quad \boxed{y = -\frac{1}{2 \cdot (1+w^2)}}$$

$$\text{Partielle Integration: } \boxed{\int x \cdot dy = x \cdot y - \int y \cdot dx} \rightarrow \int \frac{w^2 \cdot dw}{(1+w^2)^2} = -w \cdot \frac{1}{2 \cdot (1+w^2)} + \int \frac{1}{2 \cdot (1+w^2)} \cdot dw$$

$$\left(\frac{1-e}{2 \cdot e}\right) \cdot \int \frac{dw}{1+w^2} - w \cdot \frac{1}{2 \cdot (1+w^2)} + \int \frac{1}{2 \cdot (1+w^2)} \cdot dw = C_4 \cdot t + C_5$$

$$\left(\frac{1}{e}\right) \cdot \int \frac{dw}{1+w^2} - \frac{w}{1+w^2} = C_6 \cdot t + C_7 \quad \text{mit: } C_6 = C_4 \cdot 2 \quad \text{und} \quad C_7 = C_5 \cdot 2$$

$$\left(\frac{1}{e}\right) \cdot \operatorname{arctg}(w) - \frac{w}{1+w^2} = C_6 \cdot t + C_7$$

$$w = \operatorname{tg}\left(\frac{w}{1+w^2} \cdot e + (C_6 \cdot t + C_7) \cdot e\right) \quad (4)(5) \rightarrow w = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right)}{1 + \left(\frac{1-e}{1+e}\right) \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot e + (C_6 \cdot t + C_7) \cdot e\right)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot \sin \nu}{2 \cdot (1+e \cdot \cos \nu)} + (C_6 \cdot t + C_7) \cdot e\right)$$

$$\nu = 0 \quad \text{bei } t = t_p = \text{Tag im Periapsis}$$

$$\text{mit: } e \neq 0 \rightarrow C_6 \cdot t_p + C_7 = 0$$

$$C_7 = -C_6 \cdot t_p \rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot \sin \nu}{2 \cdot (1+e \cdot \cos \nu)} + C_6 \cdot e \cdot (t - t_p)\right)$$

$$\nu = \pi \quad \text{bei } t = t_p + \frac{T}{2} = \text{Tag im Apoapsis}$$

$$\text{mit: } e \neq 0 \rightarrow C_6 \cdot e \cdot \left(t_p + \frac{T}{2} - t_p\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$C_6 = \frac{\pi}{e \cdot T} \rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot \sin \nu}{2 \cdot (1+e \cdot \cos \nu)} + \frac{\pi}{T} \cdot (t - t_p)\right) \quad (6)$$

Erste Ableitung:

$$(6) \rightarrow \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \frac{\dot{\nu}}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot \cos \nu \cdot \dot{\nu} \cdot (1+e \cdot \cos \nu) + e \cdot \sin \nu \cdot \sin \nu \cdot \dot{\nu}}{(1+e \cdot \cos \nu)^2} + \frac{\pi}{T}}{\cos^2\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot \sin \nu}{2 \cdot (1+e \cdot \cos \nu)} + \frac{\pi}{T} \cdot (t-t_p)\right)}$$

$$\frac{\dot{\nu}}{\cos^2\left(\frac{\nu}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot (e + \cos \nu) \cdot \dot{\nu}}{(1+e \cdot \cos \nu)^2} + \frac{2\pi}{T}}{\cos^2\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot \sin \nu}{2 \cdot (1+e \cdot \cos \nu)} + \frac{\pi}{T} \cdot (t-t_p)\right)}$$

$$(3) \rightarrow \dot{\nu} = (1+e \cdot \cos \nu)^2 \cdot C_1 \rightarrow \frac{(1+e \cdot \cos \nu)^2 \cdot C_1}{\cos^2\left(\frac{\nu}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot (e + \cos \nu) \cdot C_1 + \frac{2\pi}{T}}{\cos^2\left(\frac{\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot \sin \nu}{2 \cdot (1+e \cdot \cos \nu)} + \frac{\pi}{T} \cdot (t-t_p)\right)}}$$

$\nu = 0$ bei $t = t_p$ = Tag im Periapsis

$$\text{mit: } e \neq 0 \rightarrow (1+e)^2 \cdot C_1 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \left(\sqrt{1-e^2} \cdot e \cdot (e+1) \cdot C_1 + \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$C_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow (3) \rightarrow \dot{\nu} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{(1+e \cdot \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7) \quad \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

Zweite Ableitung:

$$\ddot{\nu} = -\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2 \cdot (1+e \cdot \cos \nu) \cdot e \cdot \sin \nu \cdot \dot{\nu}}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(7) \rightarrow \ddot{\nu} = -\frac{8\pi^2}{T^2} \cdot \left(\frac{1+e \cdot \cos \nu}{1-e^2} \right)^3 \cdot e \cdot \sin \nu \quad \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)$$